题目：送货问题

摘要

本文深入研究了具有供求平衡，有序卸货特点的运输问题，建立数学模型求解最小运费，安排每辆车的最佳运载方案。

在问题（一），行车路线是一个闭合回路，在受到卸货顺序限制的情况下，使每次运输的费用最小，从而使总费用最小，应用线性规划知识求得 6 辆车的工作时间分别为 5.83、5.83、7.08、7.25、7.25、7.25 小时，运输的总费用为 4875 元，总共运了 28 次。

问题（一）中，运输车的路程为固定值，在问题（二），运输车可以随时掉头，这样运输车的行车路线就不唯一了。而且运输车可以为距离港口较远的公司送小件，然后掉头为距离港口较近的公司送大件。确定约束方程，列出目标函数，求得共派了 4 辆车，各辆车的工作时间分别为 6.3、6.67、6.54、7.04 小时，运输的总费用为 4856.8 元，总共运 27 次。

在问题（三）中，增加了载重量为 4 吨和 8 吨二种类型的运输车，使问题变得复杂。当空载距离大于 $\frac{100}{3}$ 公里时，选用载重量为 4 吨的运输车较省钱，运输车行驶的最远距离是 29 公里，所以不选择载重量为 4 吨的运输车为公司送货。选用载重量为 6 吨、8 吨二种类型的运输车为公司送货，建立目标函数，约束条件，求得选择一辆 6 吨的，二辆 8 吨的车为公司送货，运输车的工作时间分别为 6.57、6.38、7.19 小时，总费用为 4409.2 元，总共运 21 次，与前二种调度方案相比，更节省钱。

关键字：线性规划　卸货顺序

一　问题重述

某地区有 8 个公司(如图一编号①至⑧)，某天某货运公司要派车将各公司所需的三种原材料 A,B,C 从某港口(编号⑨)分别运往各个公司。路线是唯一的双向道路(如图 1)。货运公司现有一种载重 6 吨的运输车，派车有固定成本 20 元/辆，从港口出车有固定成本为 10 元/车次(车辆每出动一次为一车次)。每辆车平均需要用 15 分钟的时间装车，到每个公司卸车时间平均为 10 分钟，运输车平均速度为 60 公里 / 小时(不考虑塞车现象)，每日工作不超过 8 小时。运输车载重运费 1.8 元/吨公里，运输车空载费用 0.4 元/公里。一个单位的原材料 A,B,C 分别毛重 4 吨、3 吨、1 吨，原材料不能拆分，为了安全，大小件同车时必须小件在上，大件在下。卸货时必须先卸小件，而且不允许卸下来的材料再装上车，另外必须要满足各公司当天的需求量(见表 1)。 问题：

1、货运公司派出运输车 6 辆，每辆车从港口出发(不定方向)后运输途中不允许掉头，应如何调度(每辆车的运载方案，运输成本)使得运费最小。

2、每辆车在运输途中可随时掉头，若要使得成本最小，货运公司怎么安排车辆数？应如何调度？

3、(1)如果有载重量为 4 吨、6 吨、8 吨三种运输车，载重运费都是 1.8 元/吨公里，空载费用分别为 0.2，0.4，0.7 元/公里，其他费用一样，又如何安排车辆数和调度方案？(2)当各个公司间都有或者部分有道路直接相通时，分析运输调度的难度所在，给出你的解决问题的想法(可结合实际情况深入分析)。

二 问题分析

运输过程的最大特点是三种原材料的毛重不同，而且原材料不能拆分。大小件同车时必须小件在上，大件在下。卸货时必须先卸小件，不允许卸下来的材料再装上车，当卸下 A 时，车上没有 B 和 C，当卸下 B 时，车上没有 C。在问题一中，运输途中不能掉头，运输车的行驶路线是一个闭合回路，总行程为固定值。运输车可以为距离港口较近公司送小件，为距离港口较大公司送大件。在问题二中，运输车可以随时掉头，运输车可以为距离港口较远的公司送小件，然后掉头为距离港口较近的公司送大件。在问题三中，有三种运输车，且空载费用不同，可以选择适当类型的车降低费用。

调度的目的是使运费最小，影响运费的因素有调度的车辆数、总出车次数、每车次载的货物、行车方向、卸货地点，由于变量过多，不易求出目标函数的最优解。可以分二个阶段求解，第一求出满足当天公司需求量的车次；第二确定每车次装载数量及卸货地点。

影响调度的约束条件有：⑴每次运输不能超过运输车的载重量。

⑵每日工作不超过 8 小时。
⑶满足公司当天需求。
⑷大小件同车时，小件在上，而且要先卸小件。
⑸运输车从港口出来可以按顺时针和逆时针二种方。

三 模型假设

⑴道路足够宽阔,不会发生塞车现象。 各
⑵运输车相互独立，互不影响。
⑶多辆运输车可以同时在一个港口装货，同时在一个公司卸货。
⑷各辆车最后一次运完货物后回到港口。
⑸各公司优先级别相同，只要满足当天需求量即可。

四 符号说明

P_{ijk}	第 i 辆车第 j 次装载第 k 种原材料的数量	单位
T_{ij}	第 i 辆车第 j 次从港口出发又回到港口用的时间	小时
M_{nk}	第 n 个公司所需要的第 k 种货物量	单位
Q_{ijnk}	第 i 辆车第 j 次在第 n 各公司卸载的 k 货物的量	单位
G_k	第 k 种原材料的重量	吨
D_{1n}	从港口出发到第 n 公司的顺时针距离	公里
D_{2n}	从港口出发到第 n 公司的逆时针距离	公里

顺时针距离：从港口出发按顺时针方向到公司的距离。
逆时针距离：从港口出发按逆时针方向到公司的距离。

五 模型的建立与求解

运费包括派车固定成本、过港口固定成本、载重运费、空载运费。

问题（1）:
线性规划约束条件

⑴ 原材料 A、B、C 分别毛重 4 吨、3 吨、1 吨，且原材料不能拆分，而运输车的载重量是 6 吨，所以 A、B 不可能同时在一辆车上，在满足公司当天需求量的条件下，一天最少要发 27 次车。

$$\sum_{k=1}^{3} Pijk \cdot G_k \leq 6$$

⑵ 运输车每日工作不超过 8 小时，所以每辆运货车每天为公司送货的累计工作时间应不大于 8 小时。

$$\sum_{j=1}^{j} Tij \leq 8 \qquad i=1、2、3、4、5、6$$

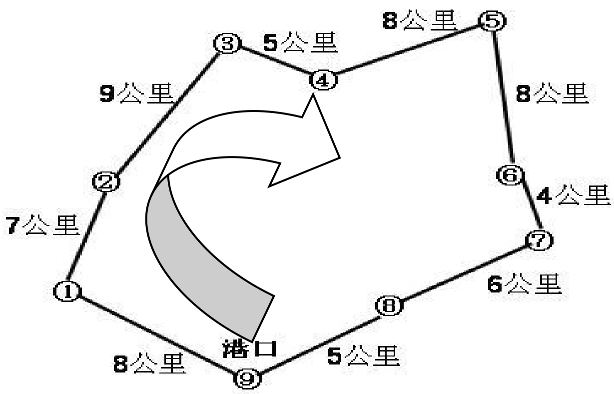
⑶ 货运公司每天为各公司送的货要满足各公司的需求量，即各车次（车辆每出动一次为一车次）为公司送的货物的总和正好满足公司当天需求。

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{j} Q_{ijnk}=M_{nk} \qquad k=1,2,3$$

⑷ 卸货时必须先卸小件，而且不允许卸下来的材料再装上车，运货车在运输途中不允许掉头。

由于运货车载重量的限制，A、C 可以组合装车，B、C 也可以组合装车，但是 A、B 不能组合装车。运输车具有以下特点：当在 n 公司卸下 A 时，这时货车是空车；当在 n 公司卸下 B 时，不能再为后续公司运送小件 C。运输车的行驶路线是一个闭合回路。

Ⅰ顺时针行车时（用“＋”表示顺时针行驶）



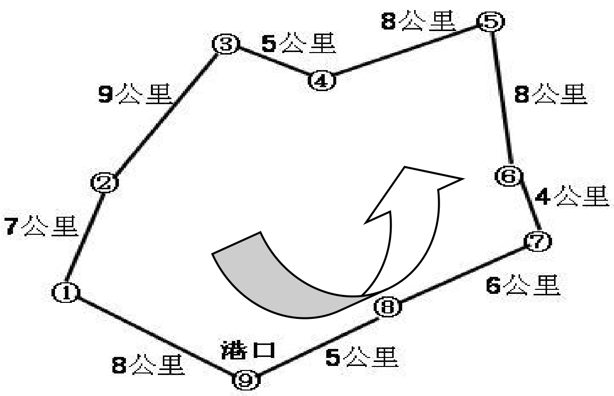
1. 当在 n 公司卸下 A 时，约束方程为

$$+\,Q_{ijn3}\sum_{N=n+1}^{8} Q_{ijnk}=0$$

2. 当在 n 公司卸下 B 时，约束方程为

$$+\,Q_{ijn2}\sum_{N=n+1}^{8} Q_{ijnk}=0 \qquad k=1\text{ 或 }3$$

Ⅱ逆时针行车时(用“－”表示逆时针行驶)



1. 当在 n 公司卸下 A 时，约束方程为

$$-Q_{ijn3}\sum_{1}^{n-1} Q_{ijnk}=0$$

2. 当在 n 公司卸下 B 时，约束方程为

$$-Q_{ijn2}\sum_{1}^{n-1} Q_{ijnk}=0 \quad k=1 \text{ 或 } 3$$

III运输车不允许掉头，行驶路线是一个闭合回路，总行程为 60 公里。

从港口出发，从不同方向到公司距离如下表

公司 行车方向	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
D_{1n}	8	15	24	29	37	45	49	55
D_{2n}	52	45	36	31	23	15	11	5

目标函数分析：

运费有派车固定成本费、从港口出车固定成本、空载费用、载重费用几部分组成。

⑴空载费用

运输车的空载费用为 0.4 元／公里。当在 n 公司把车上的货物卸完时，记 $f_n=1$，否则记 $f_n=0$。

设空载费用为 B_{ijj}

则 $B_{ij}=0.4\left[60-\min\left(D_{1n}, D_{2n}\right)\right]\cdot f_n$

⑵载重费用

运输车的载重费用为 1.8 元／吨公里，由于运输车不能掉头，货物只能按顺时针或逆时针运至公司，设载重费用为 E_i

则 $E_{ij}= 1.8\sum_{k=1}^{3} P_{ijk}.G_k〔\min（D_{1n}，D_{2n}）〕$

⑶ 固定费用

固定费用有二部分组成，即派车固定成本费和从港口出车固定成本，派车固定成本 20 元/辆，从港口出车有固定成本为 10 元/车次(车辆每出动一次为一车次)，设每天共出车 N 次。

则固定费用为 $10N+20\cdot\max(i)$

综上所述：

设运货费用为 Z，则目标函数为

$$\min Z=\sum_{1}^{N}(B_{ij}+E_{ij})+10N+20\cdot\max(i)$$

$$\text{s.t.}\left\{\begin{array}{ll}
\sum_{k=1}^{3} Pijk\cdot G_k \leqslant 6 & \\
\sum_{j=1}^{j} Tij \leqslant 8 & i=1、2、3、4、5、6 \\
\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{j} Q_{ijnk}=M_{nk} & k=1,2,3 \\
+Q_{ijn3}\sum_{N=n+1}^{8} Q_{ijnk}=0 & （“+”表示顺时针行车） \\
+Q_{ijn2}\sum_{N=n+1}^{8} Q_{ijnk}=0 & k=1 或 3 \\
-Q_{ijn3}\sum_{1}^{n-1} Q_{ijnk}=0 & （“-”表示逆时针行车） \\
-Q_{ijn2}\sum_{1}^{n-1} Q_{ijnk}=0 & k=1 或 3 \\
B_{ij}=0.4〔60-\min（D_{1n}，D_{2n}）〕\cdot f_n & \\
E_{ij}= 1.8\sum_{k=1}^{3} P_{ijk}.G_k〔\min（D_{1n}，D_{2n}）〕 &
\end{array}\right.$$

运车方案的确定：

运输途中不能掉头，运输车的行驶路线是一个闭合回路，总行程为固定值。卸货时必须先卸小件，而且不允许卸下来的材料再装上车，运输车可以为距离港口较近公司送小件，为距离港口较远公司送大件。运货车载重量为 6 吨，A、C 可以组合装车，B、C 也可以组合装车，但是 A、B 不能组合装车。运货车应尽量装满。

调度方案如下

注：“+” “-”分别表示运输车按顺时针、逆时针方向行驶。

公司／车次	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	T_i.（小时）	运费(元)
P_{11}	+A2C								5.83	696
P_{12}		+2B								
P_{13}							-B	-B		
P_{14}					-2B					
P_{21}	+A2C								5.83	505
P_{22}	+B	+B								
P_{23}							-A2C			
P_{24}								-A		
P_{31}		+A2C							7.08	802.4
P_{32}	+AC									
P_{33}							-A2C			
P_{34}					-A2C					
P_{35}								-A		
P_{41}			+A2C						7.25	1044
P_{42}	+A									
P_{43}				-B			-B			
P_{44}				+A2C						
P_{45}								-A		
P_{51}			+A2C						7.25	966.2
P_{52}								-AC		
P_{53}						-2B				
P_{54}				-A	-2C					
P_{55}								-A		
P_{61}		+2B							7.25	843.4
P_{62}								-2B		
P_{63}						-2B				
P_{64}				-A			-C			
P_{65}						-3C				
总计费用	4857									

派车方案显示了派车的数量、各车行驶方向、各车次装货数量、卸货地点及

在各地点卸货的数量。有各车工作时间可以看出各车辆工作时间较长，劳动强度较大。

问题（二）：

与问题（一）的不同之处是问题（二）中，运输车在运输途中可以随时掉头，这样运输车的行驶路线不再是一个闭合回路。卸货时必须先卸小件，而且不允许卸下来的材料再装上车，当卸下 A 时，车上没有 B 和 C，当卸下 B 时，车上没有 C。运输车可以为较远公司送小件，然后掉头为较近公司送大件。

线性规划约束条件

⑴ 原材料 A、B、C 分别毛重 4 吨、3 吨、1 吨，且原材料不能拆分，而运输车的载重量是 6 吨，所以 A、B 不可能同时在一辆车上，在满足公司当天需求量的条件下，一天最少要发 27 次车。

$$\sum_{k=1}^{3} Pijk \cdot G_k \leqslant 6$$

⑵ 运输车每日工作不超过 8 小时，所以每辆运货车每天为公司送货的累计工作时间应不大于 8 小时。

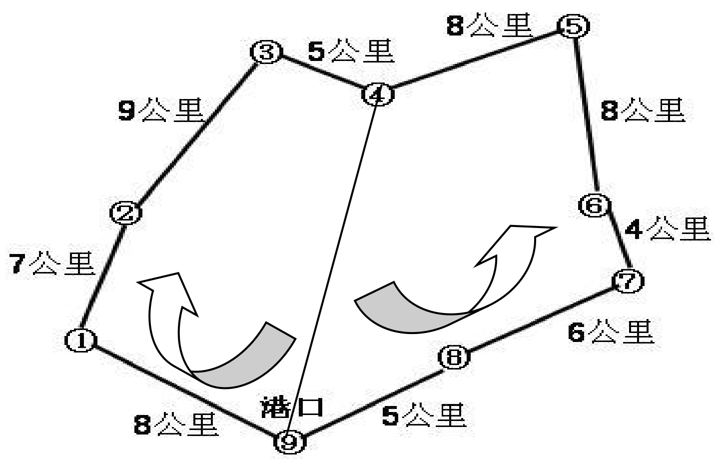
$$\sum_{j=1}^{j} Tij \leqslant 8 \qquad i=1、2\cdots\cdots$$

⑶ 货运公司每天为各公司送的货要满足各公司的需求量，即各车次（车辆每出动一次为一车次）为公司送的货物的总和正好满足公司当天需求。

$$\sum_{i=1}^{i} \sum_{j=1}^{j} Q_{ijnk} = M_{nk} \qquad k=1,2,3$$

⑷运输车在运输途中可以随时掉头，从港口到各公司的最短距离如下表

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
8	15	24	29	23	15	11	5



使运费最小时，应按顺时针行驶为①～④公司送货，按逆时针行驶为⑤～⑧公司送货。货车送完货应掉头沿原路返回港口。

Ⅰ 为①～④公司送货（“＋”表示运输车按顺时针方向行驶）

1. 当在 n 公司卸下 A 时，约束方程为

$$+Q_{ijn3}\sum_{N=n+1}^{4}Q_{ijnk}=0 \qquad （n=1、2、3、4）$$

2. 当在 n 公司卸下 B 时，约束方程为

$$+Q_{ijn2}\sum_{N=n+1}^{4}Q_{ijnk}=0 \quad k=1\text{ 或 }3 \quad （n=1、2、3、4）$$

Ⅱ 为⑤～⑧公司送货（“－”表示运输车按逆时针方向行驶）

1. 当在 n 公司卸下 A 时，约束方程为

$$-Q_{ijn3}\sum_{5}^{n-1}Q_{ijnk}=0 \qquad （n=5、6、7、8）$$

2. 当在 n 公司卸下 B 时，约束方程为

$$-Q_{ijn2}\sum_{5}^{n-1}Q_{ijnk}=0 \quad k=1\text{ 或 }3 \quad （n=5、6、7、8）$$

目标函数分析

运费有派车固定成本费、从港口出车固定成本、空载费用、载重费用几部分组成。

⑴ 空载费用

运输车的空载费用为 0.4 元／公里。当在 n 公司把车上的货物卸完时，记 $f_n=1$，否则记 $f_n=0$。

为①～④公司送货时，货车应掉头沿原路返回

空载费用为 $B_{ij}=0.4D_{1n}\cdot f_n$

为⑤～⑧公司送货时，货车应掉头沿原路返回

空载费用为 $B_{ij}=0.4D_{2n}\cdot f_n$

以上二式合并为

$$B_{ij}=0.4\min(D_{1n},D_{2n})\cdot f_n$$

⑵ 载重费用

运输车的载重费用为 1.8 元／吨公里，货物按顺时针或逆时针运至公司，设载重费用为 E_i

为①～④公司送货时，货车按顺时针方向行驶

则 $E_{ij}=1.8\sum_{k=1}^{3}P_{ijk}.G_k\cdot D_{1n}$

为⑤～⑧公司送货时，货车按逆时针方向行驶

则 $E_{ij}=1.8\sum_{k=1}^{3}P_{ijk}.G_k\cdot D_{2n}$

以上二式合并为

$$E_{ij}=1.8\sum_{k=1}^{3}P_{ijk}.G_k\cdot \min(D_{1n},D_{2n})$$

⑶ 固定成本费

固定成本费有派车固定成本费、从港口出车固定成本二部分组成。

固定成本费 $10N+20\cdot\max(i)$

综上所述：

设运货费用为 Z，则目标函数为

$$\min Z=\sum_{1}^{N}(B_{ij}+E_{ij})+10N+20\cdot\max(i)$$

$$\begin{cases}
\sum_{k=1}^{3}Pijk\cdot G_k\leqslant 6 \\
\sum_{j=1}^{j}Tij\leqslant 8 \qquad i=1、2\cdots\cdots \\
\sum_{i=1}^{i}\sum_{j=1}^{j}Q_{ijnk}=M_{nk} \qquad k=1,2,3 \\
+Q_{ijn3}\sum_{N=n+1}^{4}Q_{ijnk}=0 \qquad (n=1、2、3、4) \\
+Q_{ijn2}\sum_{N=n+1}^{4}Q_{ijnk}=0 \qquad k=1\text{ 或 }3 \quad (n=1、2、3、4) \\
-Q_{ijn3}\sum_{5}^{n-1}Q_{ijnk}=0 \qquad (n=5、6、7、8) \\
-Q_{ijn2}\sum_{5}^{n-1}Q_{ijnk}=0 \qquad k=1\text{ 或 }3 \quad (n=5、6、7、8) \\
B_{ij}=0.4\min(D_{1n},D_{2n})\cdot f_n \\
E_{ij}=1.8\sum_{k=1}^{3}P_{ijk}.G_k\cdot\min(D_{1n},D_{2n})
\end{cases}$$

注：“+” “-”分别表示运输车按顺时针、逆时针方向行驶。

运车方案确定：

卸货时必须先卸小件，而且不允许卸下来的材料再装上车，运货车在运输途中可以随时掉头，运输车可以为距离港口较远公司送小件，为距离港口较近公司送大件。运货车载重量为 6 吨，A、C 可以组合装车，B、C 也可以组合装车，但是 A、B 不能组合装车。运货车应尽量装满。

调度方案如下

注：“+” “-”分别表示运输车按顺时针、逆时针方向行驶。

<table>
<tr><th>公司
车次</th><th>①</th><th>②</th><th>③</th><th>④</th><th>⑤</th><th>⑥</th><th>⑦</th><th>⑧</th><th>T_i.（小时）</th><th>运 费（ 元 ）</th></tr>
<tr><td>P_{11}</td><td>+A2C</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="7">6.3</td><td rowspan="7">1039</td></tr>
<tr><td>P_{12}</td><td></td><td>+2B</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P_{13}</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-B</td><td>-B</td></tr>
<tr><td>P_{14}</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-2B</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P_{15}</td><td>+A2C</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P_{16}</td><td>+B</td><td>+B</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P_{17}</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-A2C</td><td></td></tr>
<tr><td>P_{21}</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-2C</td><td></td><td>-A</td><td rowspan="7">6.67</td><td rowspan="7">1327</td></tr>
<tr><td>P_{22}</td><td></td><td>+A2C</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P_{23}</td><td>+AC</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P_{24}</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-A2C</td><td></td></tr>
<tr><td>P_{25}</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-A2C</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P_{26}</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-C</td><td></td><td>-A</td></tr>
<tr><td>P_{27}</td><td></td><td>+2B</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P_{31}</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-AC</td><td rowspan="7">6.54</td><td rowspan="7">1105</td></tr>
<tr><td>P_{32}</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-2B</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P_{33}</td><td></td><td></td><td></td><td>-A</td><td>-2C</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P_{34}</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-A</td></tr>
<tr><td>P_{35}</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-2B</td></tr>
<tr><td>P_{36}</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-2B</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P_{37}</td><td></td><td></td><td></td><td>+A</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P_{41}</td><td></td><td></td><td>+A2C</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="6">7.04</td><td rowspan="6">1385.8</td></tr>
<tr><td>P_{42}</td><td>+A</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P_{43}</td><td></td><td></td><td></td><td>-B</td><td></td><td></td><td>-B</td><td></td></tr>
<tr><td>P_{44}</td><td></td><td></td><td></td><td>+A2C</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P_{45}</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-C</td><td>-A</td></tr>
<tr><td>P_{46}</td><td></td><td></td><td>+A2C</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>总计费用</td><td colspan="10">4856.8</td></tr>
</table>

派车方案显示了派车的数量、各车行驶方向、各车次装货数量、卸货地点及在各地点卸货的数量。与问题（一）中的调度方案相比较，各车工作时间较短，劳动强度较小，而且派车的数量减少了。

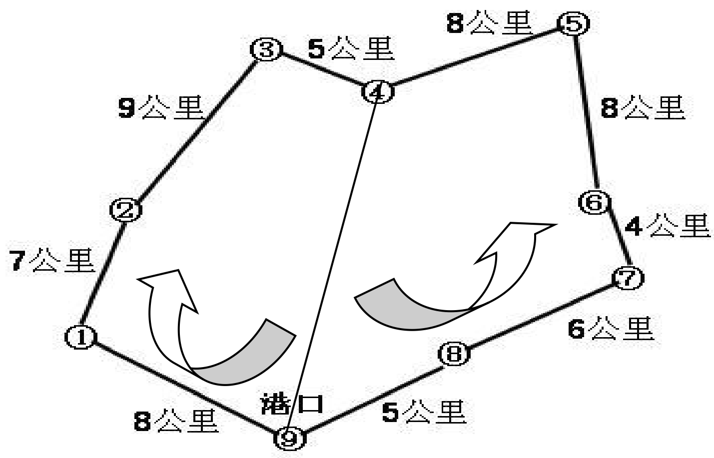
问题（三）：

与问题（二）的不同之处是问题（三）中，运输车增加了载重量为 4 吨和 8 吨的二种运输车，这样货物的组合类型就增加了，运输车可以同时运送 A、B，而且还可以同时运送 2 单位的 A 原料。运输车在运输途中可以随时掉头，卸货时必须先卸小件，而且不允许卸下来的材料再装上车，当卸下 A 时，车上没有 B 和 C，当卸下 B 时，车上没有 C。运输车可以为较远公司送小件，然后掉头为较近公司送大件。

线性规划约束条件

⑴ 运输车在运输途中可以随时掉头，从港口到各公司的最短距离如下表

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
8	15	24	29	23	15	11	5



当为公司运送相等的货物时，如果选用载重量为 4 吨和 8 吨的二种运输车，二种运输车的载重运费相等。载重量为 4 吨的运输车比载重量为 8 吨的运输车多了 10 元的过港费。载重量为 4 吨和 8 吨的运输车的空载费用分别为 0.4 元／公里、0.7 元／公里。

$$\frac{10}{0.7-0.4}=\frac{100}{3}$$

即当空载距离大于 $\frac{100}{3}$ 公里时，选用载重量为 4 吨的运输车较省钱，由上表可知运输车行驶的最远距离是 29 公里，所以该题不选择载重量为 4 吨的运输车为公司送货。

⑴ 原材料 A、B、C 分别毛重 4 吨、3 吨、1 吨，且原材料不能拆分，运输车的载重量是 6 吨、8 吨，A 与 B，A 与 A 都可以组合装车，这是与问题二的不同之处。

$$\sum_{k=1}^{3} \mathrm{Pijk} \cdot G_k \leqslant 8$$

⑵ 运输车每日工作不超过 8 小时，所以每辆运货车每天为公司送货的累计工作时间应不大于 8 小时。

$$\sum_{j=1}^{j} Tij \leqslant 8 \qquad i=1、2\cdots\cdots$$

⑶ 货运公司每天为各公司送的货要满足各公司的需求量，即各车次（车辆每出动一次为一车次）为公司送的货物的总和正好满足公司当天需求。

$$\sum_{i=1}^{i} \sum_{j=1}^{j} Q_{ijnk} = M_{nk} \qquad k=1,2,3$$

⑷ 使运费最小时，应按顺时针行驶为①～④公司送货，按逆时针行驶为⑤～⑧公司送货。货车送完货应掉头沿原路返回港口。

Ⅰ 为①～④公司送货（“＋”表示运输车按顺时针方向行驶）

1. 当在 n 公司卸下 A 时，约束方程为

$$+Q_{ijn3} \sum_{N=n+1}^{4} Q_{ijnk}=0 \qquad k=1 \text{ 或 } 2 \quad (n=1、2、3、4)$$

2. 当在 n 公司卸下 B 时，约束方程为

$$+Q_{ijn2} \sum_{N=n+1}^{4} Q_{ijn3}=0 \qquad (n=1、2、3、4)$$

Ⅱ 为⑤～⑧公司送货（“－”表示运输车按逆时针方向行驶）

3. 当在 n 公司卸下 A 时，约束方程为

$$-Q_{ijn3} \sum_{5}^{n-1} Q_{ijnk}=0 \qquad k=1 \text{ 或 } 2 \quad (n=5、6、7、8)$$

4. 当在 n 公司卸下 B 时，约束方程为

$$-Q_{ijn2} \sum_{5}^{n-1} Q_{ijn3}=0 \qquad (n=5、6、7、8)$$

目标函数分析

运费有派车固定成本费、从港口出车固定成本、空载费用、载重费用几部分组成。

⑴ 空载费用

运输车的空载费用为 0.4 元／公里，0.7 元／公里。当在 n 公司把车上的货物卸完时，记 $f_n=1$，否则记 $f_n=0$。

选择载重量为 6 吨的运输车时：

为①～④公司送货时，货车应掉头沿原路返回

空载费用为 $B_{ij}=0.4D_{1n}\cdot f_n$

为⑤～⑧公司送货时，货车应掉头沿原路返回

空载费用为 $B_{ij}=0.4D_{2n}\cdot f_n$

以上二式合并为

$$B_{ij}=0.4\min(D_{1n},D_{2n})\cdot f_n$$

选择载重量为 8 吨的运输车时：

$$B_{ij}=0.7\min(D_{1n},D_{2n})\cdot f_n$$

⑵ 载重费用

运输车的载重费用为 1.8 元 / 吨公里，货物按顺时针或逆时针运至公司，设载重费用为 E_i

为①～④公司送货时，货车按顺时针方向行驶

$$则\ E_{ij}=1.8\sum_{k=1}^{3}P_{ijk}.G_k\cdot D_{1n}$$

为⑤～⑧公司送货时，货车按逆时针方向行驶

$$则\ E_{ij}=1.8\sum_{k=1}^{3}P_{ijk}.G_k\cdot D_{2n}$$

以上二式合并为

$$E_{ij}=1.8\sum_{k=1}^{3}P_{ijk}.G_k\cdot\min(D_{1n},D_{2n})$$

⑶ 固定成本费

固定成本费有派车固定成本费、从港口出车固定成本二部分组成。

固定成本费 $10N+20\cdot\max(i)$

综上所述：

设运货费用为 Z，则目标函数为

$$\min Z=\sum_{1}^{N}(B_{ij}+E_{ij})+10N+20\cdot\max(i)$$

$$
\text{s.t.}\quad
\begin{cases}
\sum_{k=1}^{3} Pijk \cdot G_k \leqslant 8 \\
\sum_{j=1}^{j} Tij \leqslant 8 \qquad i=1、2\cdots\cdots \\
\sum_{i=1}^{i} \sum_{j=1}^{j} Q_{ijnk} = M_{nk} \qquad k=1,2,3 \\
+Q_{ijn3} \sum_{N=n+1}^{4} Q_{ijnk}=0 \qquad k=1 或 2 \quad （n=1、2、3、4） \\
+Q_{ijn2} \sum_{N=n+1}^{4} Q_{ijn3}=0 \qquad （n=1、2、3、4） \\
-Q_{ijn3} \sum_{5}^{n-1} Q_{ijnk}=0 \qquad k=1 或 2 \quad （n=5、6、7、8） \\
-Q_{ijn2} \sum_{5}^{n-1} Q_{ijn3}=0 \qquad （n=5、6、7、8） \\
B_{ij}=0.4\min（D_{1n}，D_{2n}）\cdot f_n \qquad （载重量为 6 吨） \\
B_{ij}=0.7\min（D_{1n}，D_{2n}）\cdot f_n \qquad （载重量为 6 吨） \\
E_{ij}= 1.8\sum_{k=1}^{3} P_{ijk}.G_k \cdot \min（D_{1n}，D_{2n}）
\end{cases}
$$

注：“+” “-”分别表示运输车按顺时针、逆时针方向行驶。

运车方案确定：

卸货时必须先卸小件，而且不允许卸下来的材料再装上车，运货车在运输途中可以随时掉头，运输车可以为距离港口较远公司送小件，为距离港口较近公司送大件。运货车载重量为 6 吨、8 吨二种，A 与 B，A 与 A 都可以组合装车，运货车应尽量装满。

调度方案如下

注：“+” “-”分别表示运输车按顺时针、逆时针方向行驶。

注：“+” “-”分别表示运输车按顺时针、逆时针方向行驶。

公司 \ 车次	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	T_i.（小时）	运费（元）
P_{11}				+A2C					6.57	1291.4
P_{12}			+2C	+A						
P_{13}			+A2C							
P_{14}		+B								
P_{15}		+2B								
P_{16}								-2B		
P_{21}		+BC	+A						6.38	1437.4
P_{22}	+2A									
P_{23}	+B5C									
P_{24}					-2B2C					
P_{25}						-2BC	-C			
P_{26}							-2B2C			
P_{27}								-2A		
P_{31}		+ABC							7.19	1680.7
P_{32}	+2A									
P_{33}					-A2C		-2C			
P_{34}						-2B2C				
P_{35}							-2A			
P_{36}								-2A		
P_{37}								-ABC		
P_{38}				+AB						
总计费用	4409.2									

派车方案显示了派车的数量、各车行驶方向、各车次装货数量、卸货地点及在各地点卸货的数量。与问题（一）、（二）中的调度方案相比较，运费较小，各车工作时间较短，劳动强度较小，而且派车的数量减少了。

当各个公司都有或者部分有道路直接相通时，该问题属于 TSP（旅行商问题）问题，可以用图论的知识解决，当给每条路赋权时，还要分运输车载重通过，空载通过，问题会很复杂。

参考文献:

［1］徐玖平 胡知能 王綾 运筹学（Ⅰ类） 科学出版社 2007 年

［2］方道元 韦明俊 数学建模 浙江大学出版社 2011 年